6 等差 × 等比の和

次の和を求めよ。

$$4+7\cdot4+10\cdot4^2+\cdot+(3n+1)\cdot4^{n-1}$$

◎等差×等比のΣは
$S-(\text{公比})S$ の筆算

$$S = 4 + 7\cdot4 + 10\cdot4^2 + \cdots + (3n-1)\cdot4^{n-1}$$
$$-)\ 4S = \quad 4\cdot4 + 7\cdot4^2 + \cdots + (3n-4)\cdot4^{n-1} + (3n-1)\cdot4^n$$

$$-3S = 4 + 3\cdot4 + 3\cdot4^2 + \cdots + 3\cdot4^{n-1} - (3n-1)\cdot4^n$$
$$= 4 + 3(4+4^2+\cdots+4^{n-1}) - (3n-1)\cdot4^n$$

初項 4
公比 4
項数 $n-1$

$$= 4 + 3\times 4\frac{1-4^{n-1}}{1-4} - (3n-1)\cdot4^n$$

◎等比のΣは
初項 $\dfrac{1-\text{公比の項数乗}}{1-\text{公比}}$

$$= 4+4(4^{n-1}-1) - (3n-1)\cdot4^n$$
$$= -3n\cdot4^n$$

$$\therefore\ \underline{S = n\cdot4^n}$$

7 和と一般項

$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = n^2 - n + 1$ を満たす数列 $\{a_i\}$ の一般項 a_k を求めよ。

(参考) 和と一般項

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

とすると.

$$\begin{array}{rrl} & S_n &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n \\ -) & S_{n-1} &= a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} \\ \hline & S_n - S_{n-1} &= a_n \quad (n \geqq 2) \end{array}$$

$n-1 \geqq 1$
$n \geqq 2$

S_0 とかよく分からんからダメ

$$\therefore \begin{cases} a_1 = S_1 & \text{◎1は特別} \\ a_n = S_n - S_{n-1} & (n \geqq 2) \end{cases}$$

↑筆算のイメージを持て!

(解答)

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = n^2 - n + 1$$ とおくと

$a_1 = 1$ ◎1は特別

$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= (n^2 - n + 1) - \{(n-1)^2 - (n-1) + 1\} \\ &= 2n - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rrr} n^2 & -n & +1 \\ -n^2 & +2n & -1 \\ & n & +1 \\ & & 1 \end{array}$$

よって.
$$a_k = \begin{cases} 1 & (k=1) \\ 2k-2 & (k \geqq 2) \end{cases}$$ //

$S_0 = 0$ なら a_n が1つで表せる.