2019　合否を分けるこの一題〔IAIIB〕

大学入試において、合否に影響を与える問題とはどのようなタイプでしょうか。ほぼ全員が解けるような易しい問題や、 大半の人が手がつかないような難問は、ほとんど影響を与えません。適度な思考力や計算力を要求するほどほどの難易の問題が合否を分ける問題なのです。

難易については、入試問題を 10 段階に分けたとして、

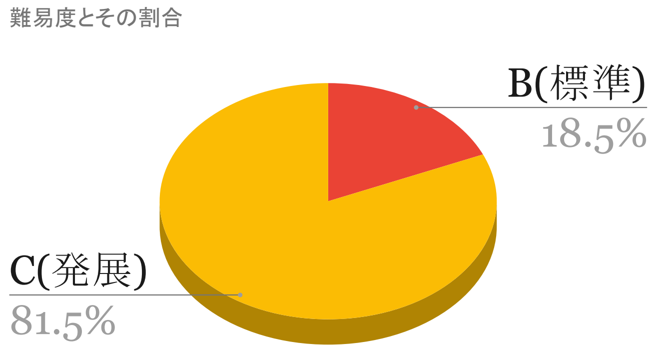
A（基本）・・・5 以下　B（標準）・・・6, 7
C（発展）・・・8, 9　D（難問）・・・10

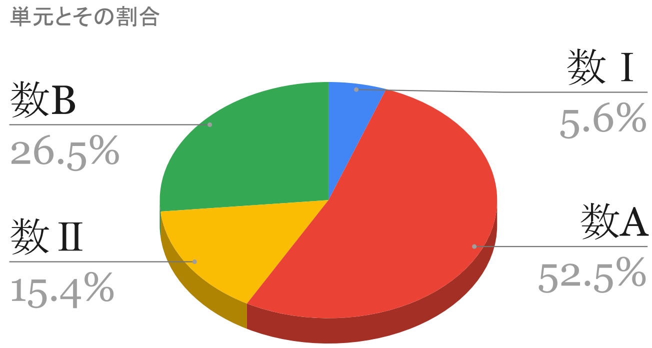
となっている。

No Study, No Life. E'z

もちろん、大学によって合否を分ける問題には難易度に差があります。

このテキストでは、**「入試標準レベル (B レベル) は完答して、入試発展レベル (C レベル) の問題でどこまで点数を伸ばすか」**が合否を分ける人向けの難易度構成になっています。





1　日本医科大学〔立体図形, 空間ベクトル〕

空間において 1 点 O をとり、相異なる 4 点 P, A, B, C を頂点とする四面体 PABC について考える。四面体 PABC は点 O を中心とする半径が 1 の球に内接しており、三角形 ABC は 1 辺の長さが l の正三角形であると仮定する。

(1) l のとり得る値の範囲を答えよ。答えのみでよい。
(2) $s = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $t = \overrightarrow{\mathrm{AP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおき、点 P から三角形 ABC を含む平面に垂線 PH を下ろす。このとき、$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を l, s, t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の 1 次結合で表せ。
(3) (2) において l を固定し、点 P が $2s - t = l^2$ を満たしながら点 O を中心とする半径 1 の球面上を動くとき、四面体 PABC の体積の最大値 $V(l)$ を求めよ。

〔C 30min〕

2　同志社大学・理系〔確率 (条件付き確率)〕

n を 5 以上の自然数とする。箱にコインが n 枚入っており、その内訳は 1 枚が表と裏の両面が白、2 枚が両面が黒、残り $(n-3)$ 枚が表が白で裏が黒である。この箱から 2 枚のコインを同時に取り出して同時に投げたとき、出た面の色が異なる事象を A、出た面の色がともに白の事象を B、出ていない面の色がともに黒の事象を C、出ていない面の色が異なる事象を D とする。コインは投げたときに表と裏が同じ確率で出るとすると、確率 $P(A) = \boxed{\text{カ}}$, $P(B) = \boxed{\text{キ}}$ であり、条件付き確率 $P_B(C) = \boxed{\text{ク}}$, $P_B(D) = \boxed{\text{ケ}}$ である。$P_B(C) = P_B(D)$ となるのは $n = \boxed{\text{コ}}$ のときである。

〔B 20min〕

3　慶應義塾大学・理工学部〔立体図形 (正四角錐)〕

空間内の図形 O-ABCD は、OA $= 3$ である正四角錐とする。ただし、正四角錐 O-ABCD とは、頂点が O、底面が正方形 ABCD で 4 つの側面が合同な二等辺三角形となる四角錐のことをいう。

(1) 点 O から平面 ABCD に垂線を下ろし、平面 ABCD との交点を H とする。$\angle \mathrm{AOH} = \theta$ としたとき、線分 AC の長さを θ を用いて表すと $\boxed{\text{テ}}$ である。また、正四角錐 O-ABCD の体積を θ を用いて表すと $\boxed{\text{ト}}$ である。

以下、OA $= 3$ であり、2 点 O, A は固定されているとする。

(2) 図形 O-ABCD が正四角錐であるという条件をみたしながら 3 点 B, C, D が動くとき、正四角錐 O-ABCD の体積の最大値は $\boxed{\text{ナ}}$ である。
(3) 正四角錐 O-ABCD の体積が $\boxed{\text{ナ}}$ であるという条件を満たしながら、3 点 B, C, D が動くとする。このとき $\triangle$OAC の周および内部が通過しうる範囲を K_1, $\triangle$OAB の周および内部が通過しうる範囲を K_2 とする。K_1 の体積は $\boxed{\text{ニ}}$ であり、K_1 と K_2 の共通部分の体積は $\boxed{\text{ヌ}}$ である。

〔C 30min〕

4　早稲田大学・基幹理工学部, 創造理工学部, 先進理工学部〔空間ベクトル〕

原点 O を中心とする半径 1 の球面 S に、四面体 PABC が内接している。点 P と三角形 ABC の重心 G を通る直線が球面 S と交わる P と異なる点を Q とする。また、$\overrightarrow{\mathrm{PA}} = \vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{PO}} = \vec{p}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\vec{a} \cdot \vec{a} = 2\vec{a} \cdot \vec{p}$ を示せ。
(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = k\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ となる k を、$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。
(3) PG : PQ $= 1 : 3$ とする。角 $\angle$APB, $\angle$BPC, $\angle$CPA に対して、次のいずれかが成り立つ事を示せ。
   - 3 つの角のうち、少なくとも 1 つは鋭角、少なくとも 1 つは鈍角である。
   - 3 つの角はすべて直角である。
(4) PG : PQ $= 1 : 3$, $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ とする。PQ を求めよ。さらに、四面体 PABC の体積を求めよ。

〔C 30min〕